可能性情報化のクールノー複占市場の分析 (あいまいさと不確実性を含む状況の数理的意思決定)

郭, 沛俊

数理解析研究所講究録 1252巻 2002年 20-26

可能性情報下のクールノー複占市場の分析

香川大学経済学部　郭　沛俊(Peijun Guo)
Faculty of Economics, Kagawa University

企業1、2はある同質的な財をそれぞれq_1, q_2産出し、財の価格は

$$P = a - b(q_1 + q_2) \qquad (P>0) \tag{1}$$

とする。

$a>0$と$b>0$はともに需要パラメータであるが、以下ではbを定数、aを可能性変数として取扱う。

aの可能性分布

$$\pi_A : [a_l, a_r] \to [0,1] \tag{2}$$

は連続関数で、ある$a_c \in [a_l, a_r]$が存在し、$\pi_A(a_c)=1$、$\pi_A(a_l)=0$、$\pi_A(a_r)=0$、$[a_l, a_c]$で増加関数、$[a_c, a_r]$で減少関数とする。

各企業$i(i=1,2)$の利潤w_iは、次のようになる（簡単のため、各企業の生産費用を0とする)。

$$w_i(a, q_i, q_j) = aq_i - bq_i^2 - bq_i q_j, i \neq j \tag{3}$$

（3）をq_iで微分すると

$$dw_i / dq_i = a - 2bq_i - bq_j, i \neq j \tag{4}$$

企業jの産出量はq_jであるとき、企業iの最適産出量q_i^*は

$$q_i^* = (a - bq_j)/2b \tag{5}$$

となって、

企業iの最大利潤は

$$w_i^*(a, q_j) = aq_i^* - bq_i^{*2} - bq_i^* q_j = \frac{(a-bq_j)^2}{4b} \tag{6}$$

となる。

したがって、ある$a>0$によって、企業$i(i=1,2)$の最小利潤は0、最大利潤は$\frac{a^2}{4b}$（$a \geq bq_i \geq 0$ので)。aの値の範囲を考えると、企業$i(i=1,2)$の利潤の可能の範囲は$[0, \frac{a_r^2}{4b}]$となる。

定義1.

効用関数　$u:[0, \frac{a_r^2}{4b}] \to [0,1]$は連続単調増加関数で、以下の条件を満たす

（1）$u(0)=0$ （7）

（2）$u(\frac{a_r^2}{4b})=1$ （8）

企業 j の産出量を q_j とするとき、企業 i の産出量 q_i の楽観的な価値 $V_{io}(q_i, q_j)$ は以下のように定義する。

$$V_{io}(q_i, q_j) = \max_a(\min(\pi_A(a), u(w_i(q_i, q_j, a)))) \quad （リスク好み） \tag{9}$$

定義３.
企業 j の生産量を q_j とするとき、企業 i の産出量 q_i の悲観的な価値 $V_{ip}(q_i, q_j)$ は以下のように定義する。

$$V_{ip}(q_i, q_j) = \min_a(\max(1-\pi_A(a), u(w_i(q_i, q_j, a)))) \quad （リスク回避） \tag{10}$$

企業が楽観的な価値と悲観的な価値に基づく、以下の行動を採るべきである。

（I）
企業 j の産出量 q_j を予想して、企業 i は自分の楽観的な価値 $V_{io}(q_i, q_j)$ を最大化するように産出量 q_i を決める。すなわち、企業 i の楽観的な反応関数は

$$q_i = \arg\max_{q_i} V_{io}(q_i, q_j) = g_{io}(q_j) \tag{11}$$

（II）
企業 j の産出量 q_j を予想して、企業 i は自分の悲観的な価値 $V_{ip}(q_i, q_j)$ を最大化するように産出量 q_i を決める。すなわち、企業 i の悲観的な反応関数は

$$q_i = \arg\max_{q_i} V_{ip}(q_i, q_j) = g_{ip}(q_j) \tag{12}$$

定義４. 方程式

$$\begin{cases} q_1 = g_{1o}(q_2) \\ q_2 = g_{2o}(q_1) \end{cases} \tag{13}$$

$$\begin{cases} q_1 = g_{1p}(q_2) \\ q_2 = g_{2p}(q_1) \end{cases} \tag{14}$$

の解 (q_{1o}^*, q_{2o}^*) と (q_{1p}^*, q_{2p}^*) はそれぞれ<u>楽観的なナッシュ均衡解</u>と<u>悲観的なナッシュ均衡解</u>と呼ぶ。

命題１. 楽観的なナッシュ均衡解 (q_{1o}^*, q_{2o}^*) は以下の方程式の解となる。

$$\begin{cases} q_1 = \dfrac{\hat{a}_{1o}(q_2) - bq_2}{2b} \\ q_2 = \dfrac{\hat{a}_{2o}(q_1) - bq_1}{2b} \end{cases} \tag{15}$$

ここで $\hat{a}_{io}(q_j)$ は $\pi_A(a)$ と $u(w_i(a, q_i^*(q_j), q_j)$ の右側の交点の横座標となる。$\hat{a}_{i0}(q_{jo}^*)$ は企業 i が楽観的な観点から最も考えるべき需要となり、<u>楽観的フォーカス・ポイント</u>と呼ぶ。

証明.

(a) $u(w_i(a, q_i, q_j))$ は a に関して連続単調増加関数である

(b) $\pi_A(a)$ は $[a_c, a_r]$ で連続減少関数で、$\pi_A(a_c) = 1$、$\pi_A(a_r) = 0$ である

(a), (b)より、以下の(c)(d)が成立つ。

(c) $u(w_i(a,q_i,q_j))=\pi(a)$ を満たす $a\in[a_c,a_r]$ が必ず唯一に存在すること

(d) $a^*=\arg\max_a(\min(\pi_A(a),u(w_i(q_i,q_j,a))))$ は $\pi_A(a)$ と $u(w_i(a,q_i,q_j))$ の右側の交点の横座標となる。

(e) $\max_{q_i}\max_a(\min(\pi_A(a),u(w_i(q_i,q_j,a))))=\max_a(\min(\pi_A(a),\max_{q_i}u(w_i(q_i,q_j,a))))$

(f) $\max_{q_i}u(w_i(q_i,q_j,a))$ の最適解は $q_i=(a-bq_j)/2b$ である。

(c), (d), (e), (f)から (15) が成立つことがわかる。

系1. $\hat{a}_{1o}=\hat{a}_{2o}$、$q^*_{1o}=q^*_{2o}$

命題2. 悲観的なナッシュ均衡解 (q^*_{1p},q^*_{2p}) は以下の方程式の解となる。

$$\begin{cases} q_1=\dfrac{\hat{a}_{1p}(q_2)-bq_2}{2b} \\ q_2=\dfrac{\hat{a}_{2p}(q_1)-bq_1}{2b} \end{cases} \qquad (16)$$

ここで $\hat{a}_{ip}(q_j)$ は $1-\pi_A(a)$ と $u(w_i(a,q^*_i,q_j))$ の左側の交点の横座標となる。$\hat{a}_{ip}(q^*_{jp})$ は企業 i が悲観的な観点から最も考えるべき需要となり、悲観的フォーカス・ポイントと呼ぶ。

証明.

(a) $u(w_i(a,q_i,q_j))$ は a に関して連続単調増加関数である

(b) $1-\pi_A(a)$ は $[a_l,a_c]$ で連続減少関数で、$1-\pi_A(a_l)=1$、$1-\pi_A(a_c)=0$ である

(a), (b)より、以下の(c)(d)が成立つ。

(c) $u(w_i(a,q_i,q_j))=1-\pi(a)$ を満たす $a\in[a_l,a_c]$ が必ず唯一に存在する

(d) $a^*=\arg\min_a(\max(1-\pi_A(a),u(w_i(q_i,q_j,a))))$ は $1-\pi_A(a)$ と $u(w_i(a,q_i,q_j))$ の左側の交点の横座標となる

(e) $\max_{q_i}\min_a(\max(1-\pi_A(a),u(w_i(q_i,q_j,a))))=\min_a(\max(1-\pi_A(a),\max_{q_i}u(w_i(q_i,q_j,a))))$

(f) $\max_{q_i}u(w_i(q_i,q_j,a))$ の最適解は $q_i=(a-bq_j)/2b$ である。

から (16) が成立つことがわかる。

系2. $\hat{a}_{1p}=\hat{a}_{2p}$、$q^*_{1p}=q^*_{2p}$

定理1. 楽観的な均衡解 (q^*_{1o},q^*_{2o}) と悲観的な均衡解 (q^*_{1p},q^*_{2p}) は必ず唯一に存在する。

証明. $\hat{a}_{io},\hat{a}_{ip}(i=1,2)$ が存在するので、$\hat{a}_{io},\hat{a}_{ip}$ はある実数と考えて、反応関数の連立方程式 (15)、(16) は一次方程式になる。その連立一次方程式の係数行列は正則行列ので、その解が唯一に存在する。

定理２．$[q_{1o}^*, q_{2o}^*] > [q_{1p}^*, q_{2p}^*]$が成立つ。

定義５．二つの可能性分布$\pi_A, \pi_B(x)$は与えられて、任意のxに対し、$\pi_A(x) \geq \pi_B(x)$が成立つならば、可能性分布π_Aは可能性分布π_Bより大きいと呼び、$\pi_A \geq \pi_B(x)$で表す。

$\pi_A \geq \pi_B(x)$のことは、π_Aで表された情報はπ_Bで表された情報より不確実さが多いことを意味する。

定理３．可能性分布π_A、π_Bに基づき得られた楽観的な均衡解をそれぞれ$(q_{1o}^{a*}, q_{2o}^{a*})$、$(q_{1o}^{b*}, q_{2o}^{b*})$とし、悲観的な均衡解をそれぞれ$(q_{1p}^{a*}, q_{2p}^{a*})$、$(q_{1p}^{b*}, q_{2p}^{b*})$とする。$\pi_A \geq \pi_B$なら、$[q_{1o}^{a*}, q_{2o}^{a*}] \geq [q_{1o}^{b*}, q_{2o}^{b*}]$、$[q_{1p}^{a*}, q_{2p}^{a*}] \leq [q_{1p}^{b*}, q_{2p}^{b*}]$が成立つ。

証明．略

定理２により、以下のことが分かる。

不確実さが増えれば、増えるほど、楽観的の観点からより大胆な行動を採り易い、悲観的な観点からより慎重な行動を採り易い。

方程式(15)の解を求める方法

ステップ 1．任意の$a \in [a_c, a_r]$を選択し、$\hat{a}_{io}$をaとする。一次方程式(15)から(q_{1o}^*, q_{2o}^*)を求める。

ステップ 2．$\pi_A(a) - u(w_i(a, q_{1o}^*, q_{2o}^*))$を計算し、$|\pi_A(a) - u(w_i(a, q_{1o}^*, q_{2o}^*))| \leq \varepsilon$なら、$\hat{a}_{io} = a$、停止する。そうでなければ、ステップ 3．へ

ステップ 3．$\pi_A(a) - u(w_i(a, q_{1o}^*, q_{2o}^*)) > 0$なら、$a = a + \Delta a (\Delta a > 0)$、$\pi_A(a) - u(w_i(a, q_i^*, q_j^*)) < 0$なら、$a = a - \Delta a$。ステップ 2．へ

方程式(16)の解を求める方法

ステップ 1．任意の$a \in [a_l, a_c]$を選択し、$\hat{a}_{ip}$をaとする。一次方程式(16)から(q_{1p}^*, q_{2p}^*)を求める。

ステップ 2．$\pi_A(a) - u(w_i(a, q_{1p}^*, q_{2p}^*))$を計算し、$|\pi_A(a) - u(w_i(a, q_{1p}^*, q_{2p}^*))| \leq \varepsilon$なら、停止する。$\hat{a}_{io} = a$。そうでなければ、ステップ 3．へ

ステップ 3．$\pi_A(a) - u(w_i(a, q_{1p}^*, q_{2p}^*)) > 0$なら、$a = a + \Delta a (\Delta a > 0)$、$\pi_A(a) - u(w_i(a, q_{1p}^*, q_{2p}^*)) < 0$なら、$a = a - \Delta a$。ステップ 2．へ

需要パラメータaに関連する新たな情報sが入ったとする。企業１は情報sを利用せず、企業２は情報sを利用する。この場合は企業２の産出量q_2は，厳密には利用する情報sの関数となる。すなわち

$q_2 = q_2(s)$

企業１，２の利潤はそれぞれ

$$w_1(a, q_1, q_2) = aq_1 - bq_1^2 - bq_1 q_2(s) \tag{17}$$

$$w_2(a, q_1, q_2) = aq_2(s) - bq_2^2(s) - bq_1 q_2(s) \tag{18}$$

sの可能性分布は$\pi_S(s)$であるので、拡張原理によって$q_2(s)$の可能性分布$\pi_Q(q_2)$を計算することができる。

企業１にとって、企業２の生産量$q_2(s)$は可能性変数になるので、企業１は企業２の産出量q_2とその可能性を考量しつつ、自分の産出量を決めることである。

企業１の生産量q_1の楽観的な価値$Z_{1o}(q_1,q_2)$は以下のように定義する。

$$Z_{1o}(q_1,q_2)=\max_a(\min(\pi_A(a),\pi_Q(q_2)*u(w_1(q_1,q_2,a)))) \quad (19)$$

定義７.

企業１の生産量q_1の悲観的な価値$Z_{1p}(q_1,q_2)$は以下のように定義する。

$$Z_{1p}(q_1,q_2)=\min_a(\max(1-\pi_A(a),(1-\pi_Q(q_2))*u(w_1(q_1,q_2,a)))) \quad (20)$$

楽観的な価値と悲観的な価値に基づく、企業１が以下の行動を採るべきである。

(I)

企業２の産出量q_2とその可能性を予想して、企業１は自分の楽観的な価値$Z_{1o}(q_1,q_2)$を最大化するように産出量q_1を決める。すなわち、企業１の楽観的な反応関数は

$$q_1=\arg\max_{q_1} Z_{1o}(q_1,q_2)=h_{10}(q_2) \quad (21)$$

(II)

企業２の産出量q_2とその可能性を予想して、企業１は自分の悲観的な価値$Z_{1p}(q_1,q_2)$を最大化するように産出量q_1を決める。すなわち、企業１の悲観的な反応関数は

$$q_1=\arg\max_{q_1} Z_{1p}(q_1,q_2)=h_{1p}(q_2) \quad (22)$$

企業２は情報sを利用し、aの条件付可能性分布$\pi_{A|s}(a)$（sなら、aの可能性分布は$\pi_{A|s}(a)$）に基づいて、企業１の産出量q_1を予想し、自分の産出量を決めることである。簡単のため、$\pi_{A|s}(a):[a_l,a_r]\to[0,1]$は連続関数で、$\pi_{A|s}(a_c^{'})=1$、$\pi_{A|s}(a_l^{'})=0$、$\pi_{A|s}(a_r^{'})=0$（$a_l\le a_l^{'}<a_c^{'}<a_r^{'}\le a_r$）、$[a_l,a_c^{'}]$で増加関数、$[a_c^{'},a_r]$で減少関数とする。

定義８.

企業２の生産量q_2の楽観的な価値$Z_{2o}(q_1,q_2)$は以下のように定義する。

$$Z_{2o}(q_1,q_2)=\max_a(\min(\pi_{A|s}(a),u(w_2(q_1,q_2,a)))) \quad (23)$$

定義９.

企業２の生産量q_2の悲観的な価値$Z_{2o}(q_1,q_2)$は以下のように定義する。

$$Z_{2p}(q_1,q_2)=\min_a(\max(1-\pi_{A|s}(a),u(w_2(q_1,q_2,a)))) \quad (24)$$

楽観的な価値と悲観的な価値に基づく、企業２が以下の行動を採るべきである。

(I)

企業１の産出量q_1を予想して、企業２は自分の楽観的な価値$Z_{2o}(q_1,q_2)$を最大化するように産出量q_2を決める。すなわち、企業２の楽観的な反応関数は

$$q_2=\arg\max_{q_2} Z_{2o}(q_1,q_2)=k_{2o}(q_1) \quad (25)$$

企業１の産出量q_1を予想し、企業２は自分の悲観的な価値$Z_{2p}(q_1, q_2)$を最大化するように産出量q_2を決める。すなわち、企業２の悲観的な反応関数は

$$q_2 = \arg\max_{q_2} Z_{2p}(q_1, q_2) = k_{2p}(q_1) \tag{26}$$

となる。

定義１０． 方程式

$$\begin{cases} q_1 = h_{1o}(q_2) \\ q_2 = k_{2o}(q_1) \end{cases} \tag{27}$$

$$\begin{cases} q_1 = h_{1p}(q_2) \\ q_2 = k_{2p}(q_1) \end{cases} \tag{28}$$

の解(q_{1o}^*, q_{2o}^*)と(q_{1p}^*, q_{2p}^*)はそれぞれ情報sに関する楽観的なナッシュ均衡解と悲観的なナッシュ均衡解と呼ぶ。

命題３． 楽観的なナッシュ均衡解(q_{1o}^*, q_{2o}^*)は以下の方程式の解となる。

$$\begin{cases} q_1 = \dfrac{\hat{a}_{1o}(q_2) - bq_2}{2b} \\ q_2 = \dfrac{\hat{a}_{2o}(q_1) - bq_1}{2b} \end{cases} \tag{29}$$

ここで$\hat{a}_{1o}(q_2)$は$\pi_A(a)$と$\pi_Q(q_2) * u(w_1(a, q_1^*, q_2))$の右側の交点の横座標となる。$\hat{a}_{1o}(q_2^*)$は企業１が楽観的な観点から考えるべき需要であり、企業１の楽観的フォーカス・ポイントと呼ぶ。$\hat{a}_{2o}(q_1)$は$\pi_{A|s}(a)$と$u(w_2(a, q_1, q_2^*))$の右側の交点の横座標となる。$\hat{a}_{2o}(q_1^*)$は企業２が楽観的な観点から考えるべき需要であり、楽観的フォーカス・ポイントと呼ぶ。

証明．　略

命題４． 悲観的なナッシュ均衡解(q_{1p}^*, q_{2p}^*)は以下の方程式の解となる。

$$\begin{cases} q_1 = \dfrac{\hat{a}_{1p}(q_2) - bq_2}{2b} \\ q_2 = \dfrac{\hat{a}_{2p}(q_1) - bq_1}{2b} \end{cases} \tag{30}$$

ここで$\hat{a}_{1p}(q_2)$は$1 - \pi_A(a)$と$(1 - \pi_Q(q_2)) * u(w_1(a, q_1^*, q_2))$の左側の交点の横座標となる。$\hat{a}_{1p}(q_{2p}^*)$は企業１が悲観的な観点から考えるべき需要であり、企業１の悲観的フォーカス・ポイントと呼ぶ。$\hat{a}_{2p}(q_1)$は$1 - \pi_{A|s}(a)$と$u(w_2(a, q_1, q_2^*))$の左側の交点の横座標となる。$\hat{a}_{2p}(q_{1p}^*)$は企業２が悲観的な観点から考えるべき需要であり、悲観的フォーカス・ポイントと呼ぶ。

定理４．（２７）の楽観的な均衡解(q_{1o}^*,q_{2o}^*)と（２８）の悲観的な均衡解(q_{1p}^*,q_{2p}^*)は必ず唯一に存在する。

命題５．各企業の均衡利潤の可能性分布$\pi_W(w)$は以下のようになる。

$$\pi_W(w)=\pi_A\left(\frac{w+bq_i^{*2}+bq_i^*q_j^*}{q_i^*}\right) \qquad (31)$$

ここで、(q_1^*,q_2^*)は企業１、２の均衡産出量。

証明. 拡張原理と $w_i(a,q_i,q_j)=aq_i-bq_i^2-bq_iq_j, i\neq j$ から明らかにする。

参考文献

1. Dubois, D. and Prade, H., Possibility Theory, Plenum Press, New York, 1988.
2. Guo,P. and Chen, F., The possibilistic approach to the newsboy problem, The First International Conference on Electronic Business, Dec. 19-21,2001, Hong Kong (Accepted).
3. Kreps, D., A Course in Microeconomic Theory, Princeton University Press, New Jersey, 1990.
4. Tanaka,H. and Guo, P., Possibilistic Data Analysis for Operations Research (Heidelberg; New York; Physica-Verlag, Feb., 1999).
5. Zadeh, L. A., Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility, Fuzzy Sets and Systems 1 (1978) 3-28
6. 有定　愛展　ゲームと情報の経済理論、勁草書房、2000年3月。